物流码 QPG0001135

全品高考

第二轮专题

数学

作业手册

万里之行始于原点

青春轨迹

跃然平面

The Second Quan Pin Study Project

责任编辑：张 晨
封面设计：唐思羽

ISBN 978-7-5724-1513-5

定价：91.80元（含“特色专项”）

印刷质检码20246980

绿色印刷产品

服务热线：4000-555-100

CONTENTS 目录

基础过关

1. ［2024·湛江二模］函数 $f(x)=4\sin\left(5x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{5}\right]$ 上的取值范围为　（　）

A. $[-2,2]$　B. $[-2,4]$

C. $[-2\sqrt{3},4]$　D. $[-2\sqrt{3},2]$

2. ［2024·合肥三模］已知 $2\sin\alpha=1+2\sqrt{3}\cos\alpha$，则 $\sin\left(2\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)=$　（　）

A. $-\dfrac{1}{8}$　B. $-\dfrac{7}{8}$

C. $\dfrac{3}{4}$　D. $\dfrac{7}{8}$

3. ［2024·太原三模］已知函数 $f(x)=a\sin x+\cos x$ 的图象关于直线 $x=\dfrac{\pi}{6}$ 对称，则函数 $g(x)=\sin x+a\cos x$ 的图象关于　（　）

A. 点 $\left(\dfrac{\pi}{6},0\right)$ 对称　B. 点 $\left(\dfrac{\pi}{3},0\right)$ 对称

C. 点 $\left(\dfrac{2\pi}{3},0\right)$ 对称　D. 点 $\left(\dfrac{5\pi}{6},0\right)$ 对称

4. ［2024·南通二模］若 $\cos\alpha$，$\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)$，$\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 成等比数列，则 $\sin 2\alpha=$　（　）

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$　B. $-\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

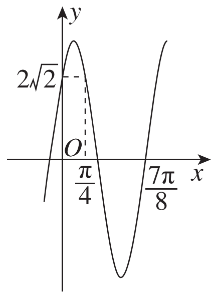
C. $\dfrac{1}{3}$　D. $-\dfrac{1}{4}$

5. ［2024·桂林三模］已知函数 $f(x)=\cos\omega x-2\sin 2\omega x\sin\omega x(\omega>0)$ 在 $(0,2\pi)$ 上有最小值没有最大值，则 ω 的取值范围是　（　）

A. $\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2}\right]$　B. $\left[\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2}\right)$

C. $\left[\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{3}\right)$　D. $\left(\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{3}\right]$

6. 已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,0<\varphi<\pi)$ 的部分图象如图所示，将 $f(x)$ 的图象向左平移 $\dfrac{\pi}{4}$ 个单位长度，得到函数 $g(x)$ 的图象，若 $g(x_0)=1$，则 $|f(x_0)|=$　（　）



A. 1　B. 2

C. $2\sqrt{3}$　D. $\sqrt{15}$

7. 已知 $\alpha,\beta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，$2(\sin\beta+\sin^2\beta)=\dfrac{\sin 2\beta}{\tan\alpha}$，则 $\tan\left(2\alpha+\beta+\dfrac{\pi}{6}\right)=$　（　）

A. $-\sqrt{3}$　B. $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

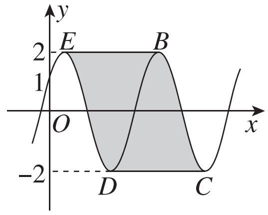
C. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　D. $\sqrt{3}$

8. （多选题）［2024·诸暨三模］若 $\dfrac{\sin x+\cos x}{2\sin x-\cos x}=1$，则　（　）

A. $\tan x=2$　B. $\sin x=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

C. $\tan 2x=\dfrac{4}{5}$　D. $\sin 2x=\dfrac{4}{5}$

9. (多选题)已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$的部分图象如图所示，且阴影部分的面积为 4π，则 ( )



A. 函数 $f(x)$的最小正周期为 π

B. 点$\left(\frac{3\pi}{8},0\right)$为曲线 $y=f(x)$的一个对称中心

C. 直线 $x=\frac{2\pi}{3}$为曲线 $y=f(x)$的一条对称轴

D. 函数 $f(x)$在区间$\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right]$上单调递增

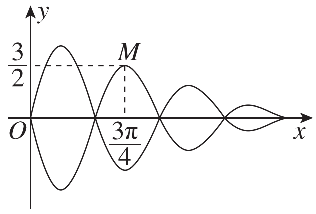
10. [2024·北京海淀区一模] 已知函数 $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\sin 2x$，则 $f\left(\frac{5}{4}\pi\right)=$________；函数 $f(x)$的图象的一个对称中心的坐标为________.

11. [2024·南平三模] 函数 $f(x)=\sin\omega x(\omega>0)$在区间$\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$上单调递增，且在区间$(0,2\pi)$上恰有两个极值点，则 ω 的取值范围是________.

12. 已知 α,β 均为锐角，且满足$\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\beta}=2\cos\alpha$，则 $\alpha-\beta$ 的最大值为________.

能力提升

13. 如图所示的音乐喷泉曲线，我们叫葫芦曲线(像湖面上高低起伏的小岛在水中的倒影与自身形成的图形，也可以形象地称它为倒影曲线)，每过相同的间隔，它的振幅就变化一次，且过点 $M\left(\frac{3\pi}{4},\frac{3}{2}\right)$，其对应的方程为 $|y|=\left(2-\frac{1}{2}\left[\frac{2x}{\pi}\right]\right)|\sin\omega x|(x\geqslant 0,1<\omega<3)$，其中$[x]$为不超过 x 的最大整数. 若该葫芦曲线上一点 N 的横坐标为$\frac{7\pi}{6}$，则点 N 的纵坐标为 ( )



A. ± 1　　B. $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $\pm\frac{1}{2}$　　D. $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

14. (多选题)已知函数 $f(x)=\sin x+|\cos 2x|$，则下列说法正确的是 ( )

A. 2π 是 $f(x)$的一个周期

B. $f(x)$的最小值是-2

C. 存在唯一实数 $a\in(0,2)$，使得 $f(x+a)$是偶函数

D. $f(x)$在$[0,\pi]$上有 3 个极大值点

15. 已知函数 $f(x)=a\sin x+b\cos x$ 的图象上有一最低点$\left(\frac{11\pi}{6},-2\right)$，将此函数的图象向左平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度得 $y=g(x)$的图象，若函数 $g(x)$的图象在 $x=x_0\left(\frac{3\pi}{2}<x_0<2\pi\right)$处的切线与 $g(x)$的图象恰好有三个公共点，则$\tan x_0-x_0$ 的值是__________.

基础过关

1. [2024·湖南长郡中学一模] 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,1)$，$\boldsymbol{b}=(0,t)$，若 $\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})$，则 $|\boldsymbol{b}|=$ （　）

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. 1

C. $\sqrt{2}$　　D. 2

2. 在△ABC 中，D 是边 BC 上一点，且 $BD=2DC$，E 是 AC 的中点，记 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{m}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{n}$，则 $\overrightarrow{BE}=$ （　）

A. $\frac{5}{3}\boldsymbol{n}-3\boldsymbol{m}$　　B. $\frac{7}{2}\boldsymbol{n}-3\boldsymbol{m}$

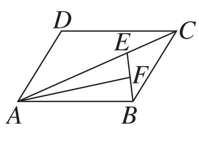
C. $\frac{7}{2}\boldsymbol{m}-3\boldsymbol{n}$　　D. $\frac{5}{2}\boldsymbol{m}-3\boldsymbol{n}$

3. [2024·东北三省一模] 已知 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是单位向量，若 $|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，则 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角是 （　）

A. $\frac{\pi}{3}$　　B. $\frac{\pi}{2}$

C. $\frac{2\pi}{3}$　　D. $\frac{3\pi}{4}$

4. 在平行四边形 $ABCD$ 中，E 是对角线 AC 上靠近点 C 的三等分点，点 F 在 BE 上，若 $\overrightarrow{AF}=x\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$，则 $x=$ （　）



A. $\frac{2}{3}$　　B. $\frac{4}{5}$

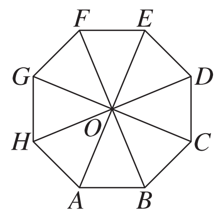
C. $\frac{5}{6}$　　D. $\frac{6}{7}$

5. [2024·佛山一模] 对于任意非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，若 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{c}$ 上的投影向量互为相反向量，下列结论一定成立的是 （　）

A. $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})/\!/\boldsymbol{c}$　　B. $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})/\!/\boldsymbol{c}$

C. $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{c}$　　D. $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{c}$

6. [2024·湖南雅礼中学一模]《易经》是中华民族智慧的结晶，易有太极，太极生两仪，两仪生四象，四象生八卦，易经包含了深邃的哲理. 如图所示是八卦模型图以及根据八卦图抽象得到的正八边形 $ABCDEFGH$，其中 $AB=1$，O 为正八边形的中心，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HD}=$ （　）



A. $\sqrt{2}-1$　　B. 1

C. $\sqrt{2}$　　D. $1+\sqrt{2}$

7. [2024·江西鹰潭二模] 在 Rt△ABC 中，内角 A，B，C 所对应的边为 a，b，c，$A=\frac{\pi}{6}$，$C=\frac{\pi}{2}$，$c=2$，P 是△ABC 外接圆上一点，则 $\overrightarrow{PC}\cdot(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB})$ 的最大值是 （　）

A. 4　　B. $2+\sqrt{10}$

C. 3　　D. $1+\sqrt{10}$

8. (多选题)已知向量 $\boldsymbol{a}=(-1,2)$,$\boldsymbol{b}=(6,-2)$,则 ( )

A. $(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{a}$

B. $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{65}$

C. $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为$\frac{\pi}{4}$

D. $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量为$-\frac{1}{4}\boldsymbol{b}$

9. (多选题)[2024·宁波二模] 若平面向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 满足$|\boldsymbol{a}|=1$,$|\boldsymbol{b}|=1$,$|\boldsymbol{c}|=3$ 且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$,则 ( )

A. $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|$的最小值为 2

B. $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|$的最大值为 5

C. $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|$的最小值为 2

D. $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|$的最大值为$\sqrt{13}$

10. [2021·新高考全国Ⅱ卷] 已知向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$,$|\boldsymbol{a}|=1$,$|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=2$,则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=$________.

11. [2024·安徽安庆模拟] 已知在$\triangle ABC$ 中,$AB=3$,$AC=4$,$\angle BAC=\frac{\pi}{3}$,$\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{DB}$,$P$ 在 CD 上,$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\lambda\overrightarrow{AD}$,则 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BC}=$________.

12. 平面向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 满足 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$,$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\pi}{3}$,$\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\rangle=\frac{\pi}{6}$,且 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{c}|=3$,$|\boldsymbol{b}|=2$,则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|=$________.

能力提升

13. 平面内互不重合的点 $A_1,A_2,A_3,B_1,B_2,B_3,B_4$,若$|\overrightarrow{A_1B_i}+\overrightarrow{A_2B_i}+\overrightarrow{A_3B_i}|=i$,其中 $i=1,2,3,4$,则$|B_1B_2|+|B_2B_3|+|B_3B_4|$的取值范围为 ( )

A. $\left[\frac{4}{3},\frac{8}{3}\right]$　　B. $\left[\frac{4}{3},\frac{16}{3}\right]$

C. $\left[\frac{4}{3},\frac{10}{3}\right]$　　D. $[1,5]$

14. (多选题)[2024·苏锡常镇四市二调] 在长方形 $ABCD$ 中,$AB=8$,$AD=6$,点 E,F 分别为边 BC 和 CD 上两个动点(含端点),且 $EF=5$,设 $\overrightarrow{BE}=\lambda\overrightarrow{BC}$,$\overrightarrow{DF}=\mu\overrightarrow{DC}$,则 ( )

A. $\frac{1}{6}\leqslant\lambda\leqslant1$,$\frac{3}{8}\leqslant\mu\leqslant1$

B. $\lambda+\mu$ 为定值

C. $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}$ 的最小值为 50

D. $|\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}|$的最大值为$\sqrt{265}$

15. 已知 O 是$\triangle ABC$ 所在平面内一点,且$|\overrightarrow{AB}|=2$,$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AC}=-1$,$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AC}=1$,则$\angle ABC$ 的最大值为________.

基础过关

1. ［2024·新课标Ⅱ卷］记△ABC的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，已知$\sin A+\sqrt{3}\cos A=2$.

(1)求A；

(2)若$a=2$，$\sqrt{2}b\sin C=c\sin 2B$，求△ABC的周长.

2. △ABC的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，已知$a\cos B-b\cos A=b+c$.

(1)求角A的值；

(2)若$a=2\sqrt{3}$，△ABC的面积为$\sqrt{3}$，求b，c.

3. ［2024·广东惠州一模］在△ABC中，已知a，b，c分别为内角A，B，C的对边.若向量$\boldsymbol{m}=(a,\cos A)$，向量$\boldsymbol{n}=(\cos C,c)$，且$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=3b\cos B$.

(1)求$\cos B$的值；

(2)若$2a$，b，c成等比数列，求$\dfrac{1}{\tan A}+\dfrac{1}{\tan C}$的值.

4. [2024·湖北武汉模拟] 已知锐角三角形 ABC 的三个内角 A,B,C 的对边分别是 a,b,c,且 $b^2+c^2-(b\cdot\cos C+c\cdot\cos B)^2=bc$.

(1)求角 A 的大小;

(2)如果该三角形外接圆的半径为 $\sqrt{3}$,求 bc 的取值范围.

能力提升

5. 在$\triangle ABC$ 中,内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c.已知 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\lambda\overrightarrow{AB}^2$.

(1)若 $\lambda=1$,判断$\triangle ABC$ 的形状;

(2)若 $\lambda=\dfrac{1}{2}$,求 $\tan(B-A)$的最大值.

6. [2024·南昌模拟] $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c,且 b 是 a,c 的等比中项.

(1)求 B 的最大值;

(2)若 C 为钝角,求 $\dfrac{a\cos B+b\cos A}{b\cos C+c\cos B}$ 的取值范围.

基础过关

1. 在△ABC中，内角A，B，C的对边分别为a，b，c，若$b=c$，D为AC的中点，$b\sin A=2\sin\angle ABD$，则$BD=$　　(　　)

A. 1　　B. $\sqrt{2}$

C. $\sqrt{3}$　　D. 2

2. [2024·广东广州模拟] 在△ABC中，内角A，B，C的对边分别为a，b，c，若$c=3$，$b=2$，$\angle BAC$的平分线AD的长为$\frac{4\sqrt{6}}{5}$，则BC边上的中线AH的长等于　　(　　)

A. $\frac{\sqrt{17}}{2}$　　B. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$　　C. $\frac{\sqrt{17}}{4}$　　D. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

3. [2024·重庆八中三模] 若圆内接四边形$ABCD$满足$AC=2$，$\angle CAB=\angle CAD=30°$，则四边形$ABCD$的面积为　　(　　)

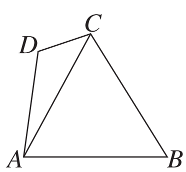
A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. 3　　D. $2\sqrt{3}$

4. 在△ABC中，$\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$，$\angle ADB=\frac{\pi}{3}$，若$CD=2$，则$\frac{BC^2}{BA^2}$的最大值为　　(　　)

A. $\sqrt{3}$　　B. 2

C. $\sqrt{7}-2$　　D. $\frac{\sqrt{3}+2}{2}$

5. (多选题)[2024·湖北鄂州一模] 如图，在锐角三角形ABC中，内角A，B，C的对边分别为a，b，c，若$\sin A=\sin B$，且$\sqrt{3}(a\cos B+b\cos A)=2c\sin C$，$D$是△$ABC$外一点且$B$，$D$在直线$AC$异侧，$DC=2$，$DA=6$，则下列说法正确的是　　(　　)



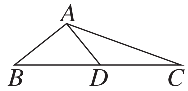
A. △ABC是等边三角形

B. 若$AC=2\sqrt{13}$，则A，B，C，D四点共圆

C. 四边形$ABCD$面积的最小值为$10\sqrt{3}-12$

D. 四边形$ABCD$面积的最大值为$10\sqrt{3}+12$

6. 如图，在△ABC中，$\angle DAC=\frac{\pi}{6}$，$AC=2\sqrt{2}$，$CD=2$，D为边BC上的一点，且$AD\perp AB$，则$AB=$________.



7. [2024·南通二调] 在△ABC中，$AB=\sqrt{7}$，$AC=1$，M为BC的中点，$\angle MAC=60°$，则$AM=$________.

8. 在△ABC中，$AB=2AC$，AD是$\angle A$的角平分线，且△ABC的面积为1，当BC最短时，$\frac{AD}{AC}=$________.

9. 在△ABC中，点D在边AB上，$BD=2AD$，$\angle ACD=45°$，$\angle BCD=90°$.

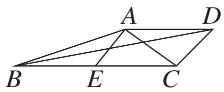
(1)求证：$BC=\sqrt{2}AC$；

(2)若$AB=\sqrt{5}$，求BC和CD的长.

10. [2024·云南楚雄模拟] 如图,在四边形 $ABCD$ 中,E 为 BC 的中点,$AB=3$,$AC=2$,$\angle BAC=\frac{2\pi}{3}$.

(1)求 $\cos\angle AEC$;

(2)若 $AE/\!/CD$,$CD=\frac{\sqrt{7}}{2}$,求 BD.



能力提升

11. [2024·福建泉州模拟] 在△ABC 中,角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c,已知 $a<b<c$ 且 $\tan A$,$\tan B$,$\tan C$ 均为整数.

(1)证明:$\tan^2 B-1=\tan A\tan C$;

(2)设 AC 的中点为 D,求$\angle CDB$ 的余弦值.

12. [2024·湖南长沙一中一模] 在△ABC 中,内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c,已知 $\tan C+\sqrt{3}=\tan B(\sqrt{3}\tan C-1)$,

(1)求角 A;

(2)若 $a=\sqrt{3}$,△ABC 所在平面内有一点 D 满足$\angle BDC=\frac{2}{3}\pi$,且 BC 平分$\angle ABD$,求△ACD 面积的取值范围.

基础过关

1. [2024·广东江门一模] 已知$\{a_n\}$是等比数列，$a_3a_5=8a_4$，且a_2，a_6是方程$x^2-34x+m=0$的两根，则$m=$ （　）

A. 8　　B. -8

C. 64　　D. -64

2. [2024·吉林三模] 若互不相等的正数a，b，c满足$2b=a+c$，则 （　）

A. $\ln a$，$\ln b$，$\ln c$成等差数列

B. $\ln a$，$\ln b$，$\ln c$成等比数列

C. e^a，e^b，e^c成等差数列

D. e^a，e^b，e^c成等比数列

3. [2024·安徽芜湖模拟] 已知S_n为递增的等差数列$\{a_n\}$的前n项和，且$\left\{\frac{S_n}{2n-9}\right\}$为等差数列，则使得$a_n>0$成立的$n$的最小值为 （　）

A. 2　　B. 3

C. 4　　D. 5

4. [2024·河南五市联考] 某款卷筒卫生纸绕在圆柱形空心纸筒上，纸筒直径为20 mm，卫生纸厚度约为0.1 mm，若未使用时直径为80 mm，则这个卷筒卫生纸总长度大约为(参考数据π≈3.14) （　）

A. 47 m　　B. 51 m

C. 94 m　　D. 102 m

5. [2024·长郡中学二模] 已知数列$\{a_n\}$为等差数列，$\{b_n\}$为等比数列，$a_4=b_4=4$，则 （　）

A. $b_3b_5\geqslant a_3a_5$　　B. $b_3+b_5\geqslant a_3+a_5$

C. $b_3b_5\leqslant a_3a_5$　　D. $b_3+b_5\leqslant a_3+a_5$

6. 已知S_n是公比不为1的等比数列$\{a_n\}$的前n项和，则“S_2，S_6，S_3成等差数列”是“存在不相等的正整数m，n，使得a_m，a_{mn}，a_n成等差数列”的 （　）

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

7. (多选题)[2024·东北三省二模] 已知数列$\{a_n\}$是公差为d的等差数列，S_n是其前n项和，若$a_1<0$，$S_{2000}=S_{2024}$，则 （　）

A. $d>0$　　B. $a_{2012}=0$

C. $S_{4024}=0$　　D. $S_n\geqslant S_{2012}$

8. (多选题)已知$\{a_n\}$是等比数列，S_n是其前n项和，满足$a_3=2a_1+a_2$，则下列说法正确的有 （　）

A. 若$\{a_n\}$的各项均为正数，则$\{a_n\}$是递增数列

B. S_n，$S_{2n}-S_n$，$S_{3n}-S_{2n}$一定是等比数列

C. 若存在$M>0$，使$|a_n|\leqslant M$对任意$n\in\mathbf{N}^*$都成立，则$\{|a_n|\}$是等差数列

D. 若$a_n>0$，且$a_1=\frac{1}{100}$，$T_n=a_1\cdot a_2\cdots a_n$，则当$n=7$时$T_n$取到最小值

9. 在等比数列$\{a_n\}$中，$a_3=2$，$a_{11}=8$，则$a_7=$________.

10. 已知等差数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的前n项和分别为S_n，T_n，且$\frac{S_n}{T_n}=\frac{2n+1}{4n}$，则$\frac{a_5}{b_3+b_7}=$________.

11. 设等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$3S_2>S_6>0$，则公比q的取值范围为________.

12. 已知S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和，满足$S_n=\frac{1}{2}a_n^2+\frac{1}{2}a_n-1(n\in\mathbf{N}^*)$，且$a_1$，$a_2$，$a_3$，$a_4$，$a_5$成等比数列，当$n\geqslant5$时，$a_n>0$.

(1)求证：当$n\geqslant5$时，$\{a_n\}$成等差数列；

(2)求$\{a_n\}$的前n项和S_n.

能力提升

13. [2024·东北三省三校三模] 已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且 $S_n=3a_n-2^n$.

(1)求证：数列$\{a_n-2^n\}$是等比数列；

(2)设 $b_n=a_n+\lambda\cdot 2^n-(\lambda+1)\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$，若$\{b_n\}$是递增数列，求实数 λ 的取值范围.

14. 已知各项均为正数的数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且 $a_1=1$，$S_{n+1}^2-S_n^2=8n$，$n\in\mathbf{N}^*$.

(1)求 a_n；

(2)在数列$\{a_n\}$的每相邻两项 a_k，a_{k+1} 之间依次插入 a_1，a_2，…，a_k，得到数列$\{b_n\}$：a_1，a_1，a_2，a_1，a_2，a_3，a_1，a_2，a_3，a_4，…，求$\{b_n\}$的前 100 项和.

基础过关

1. 在数列$\{a_n\}$中，若$a_2=2$，$a_n=(n+2)(a_{n+1}-a_n)$，则$a_{2024}=$ （ ）

A. 1012　B. 1013

C. 2023　D. 2024

2. 记数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$a_1=1$，$S_n+S_{n+1}=3n^2+2n+1$，则$S_{20}=$ （ ）

A. 590　B. 602

C. 630　D. 650

3. [2024·广东佛山二模] 设数列$\{a_n\}$的前n项之积为T_n，满足$a_n+2T_n=1(n\in\mathbf{N}^*)$，则$a_{2024}=$ （ ）

A. $\frac{1011}{1012}$　B. $\frac{1011}{1013}$

C. $\frac{4047}{4049}$　D. $\frac{4048}{4049}$

4. 我们把由0和1组成的数列称为0－1数列，0－1数列在计算机科学和信息技术领域有着广泛应用，把斐波那契数列$\{F_n\}$（$F_1=F_2=1$，$F_{n+2}=F_n+F_{n+1}$）中的奇数换成0，偶数换成1可得到0－1数列$\{a_n\}$，记数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，则S_{100}的值为 （ ）

A. 32　B. 33

C. 34　D. 35

5. （多选题）[2024·贵阳二模] 设首项为1的数列$\{a_n\}$前n项和为S_n，已知$S_{n+1}=2S_n+n-1$，则下列结论正确的是 （ ）

A. 数列$\{S_n+n\}$为等比数列

B. 数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=2^n-n$

C. 数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2^{n-1}-1$

D. 数列$\{a_n+1\}$为等比数列

6. （多选题）[2024·济南二模] 数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_n=\begin{cases}a_{n-1},\frac{n}{4}\in\mathbf{N}^*,\\ a_{n-1}+1,\frac{n}{4}\notin\mathbf{N}^*,\end{cases}$ $n\geqslant2$，b_m表示$\{a_n\}$落在区间$[2^m,2^{m+1})$的项数，其中$m\in\mathbf{N}^*$，则 （ ）

A. $b_3=10$

B. $\frac{3n}{4}\leqslant a_n\leqslant\frac{3n+3}{4}$

C. $\sum\limits_{k=1}^{4n}a_k=6n^2+3n$

D. $\sum\limits_{k=1}^{2n}b_k=\frac{4}{3}(4^n-1)$

7. [2024·嘉兴二模] 设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，等比数列$\{b_n\}$的前n项和为T_n，若$b_1=-1$，$b_5=8b_2$，$(1-2^n)S_n=n(n+1)T_n$，则$a_n=$________.

8. [2024·湖北十一校联考] 设数列$\{a_n\}$满足$a_1=3$，$a_{n+1}=3a_n-4n$，若$b_n=\frac{4n^2+8n+5}{a_na_{n+1}}$且数列$\{b_n\}$的前$n$项和为$S_n$，则$(6n+9)S_n=$________.

9. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1+\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}+\cdots+\frac{a_n}{n}=2n$ $(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)已知数列$\{b_n\}$满足$b_n=\frac{a_n}{2^{n+1}}$，求数列$\{b_n\}$的前n项和T_n.

10. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=\frac{1}{2}$，$a_n-a_{n+1}-a_na_{n+1}=0$.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)若数列$\{b_n\}$满足$b_1=1$，$b_{2n}-b_{2n-1}=b_{2n+1}-b_{2n}=\frac{1}{a_n}$，求证：$\frac{1}{b_2}+\frac{1}{b_4}+\cdots+\frac{1}{b_{2n}}<\frac{3}{4}$.

能力提升

11. 已知数列$\{a_n\}$中，$a_n>0$，$a_1=3$，记数列$\{a_n\}$的前n项的乘积为S_n，且$S_n=\sqrt{a_n^{n+1}}$.

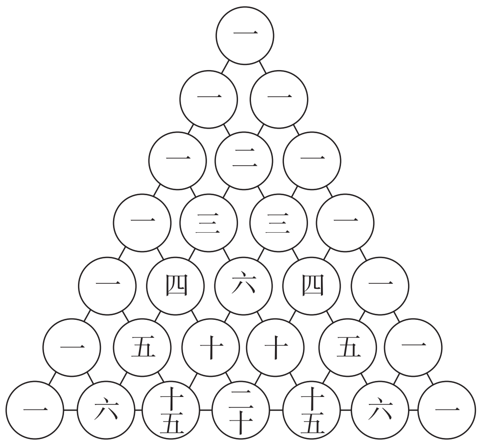
(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)设$b_n=\frac{a_n-1}{a_n+1}$，数列$\{b_n\}$的前n项和为T_n，求证：$T_n\in(n-1,n)$.

12. 我国南宋时期的数学家杨辉，在他1261年所著的《详解九章算法》一书中，用如图的三角形解释二项和的乘方规律. 此图称为“杨辉三角”，也称为“贾宪三角”. 在此图中，从第三行开始，首尾两数为1，其他各数均为它肩上两数之和.

(1)把“杨辉三角”中第三斜列各数取出按原来的顺序排列得一数列：1，3，6，10，15，…，写出a_n与a_{n-1}($n\in\mathbf{N}^*$，$n\geqslant2$)的递推关系，并求出数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)已知数列$\{b_n\}$满足$b_1+\frac{1}{2}b_2+\frac{1}{3}b_3+\cdots+\frac{1}{n}b_n=2a_n$($n\in\mathbf{N}^*$)，设数列$\{c_n\}$满足：$c_n=\frac{2n+1}{b_nb_{n+1}}$，数列$\{c_n\}$的前$n$项和为$T_n$，若$T_n<\frac{n}{n+1}\lambda$($n\in\mathbf{N}^*$)恒成立，试求实数$\lambda$的取值范围.



基础过关

1. ［2024·山西阳泉三模］已知等差数列$\{a_n\}$中，a_7是函数$f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$的一个极大值点，则$\tan(a_5+a_9)$的值为（　）

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B. $\sqrt{3}$

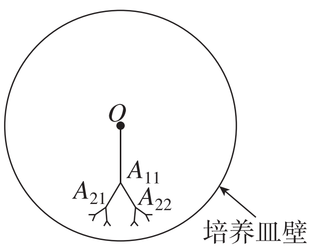
C. $\pm\sqrt{3}$　　D. $-\sqrt{3}$

2. ［2024·四川成都模拟］已知函数$f(x)=x^3+\lg(\sqrt{x^2+1}+x)+1$，若等差数列$\{a_n\}$的前$n$项和为$S_n$，且$f(a_4-1)=-9$，$f(a_{2021}-3)=11$，则$S_{2024}=$（　）

A. -4048　　B. 0

C. 2024　　D. 4048

3. 某生物兴趣小组在显微镜下拍摄到一种黏菌的繁殖轨迹，如图①. 通过观察发现，该黏菌繁殖符合如下规律：①黏菌沿直线繁殖一段距离后，就会以该直线为对称轴分叉（分叉的角度约为60°），再沿直线繁殖，…；②每次分叉后沿直线繁殖的距离约为前一段沿直线繁殖的距离的一半. 于是，该组同学将整个繁殖过程抽象为如图②所示的一个数学模型：黏菌从圆形培养皿的中心O开始，沿直线繁殖到A_{11}，然后分叉向A_{21}与A_{22}方向继续繁殖，其中$\angle A_{21}A_{11}A_{22}=60°$，且$A_{11}A_{21}$与$A_{11}A_{22}$关于$OA_{11}$所在直线对称，$A_{11}A_{21}=A_{11}A_{22}=\frac{1}{2}OA_{11}$…. 若$OA_{11}=4$ cm，为保证黏菌在繁殖过程中不会碰到培养皿壁，则培养皿的半径r（$r\in\mathbf{N}^*$，单位：cm）至少为（　）



A. 6　　B. 7

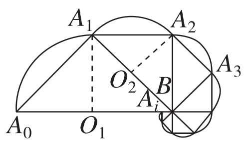
C. 8　　D. 9

4. ［2024·浙江诸暨三模］设$0\leqslant a_1<a_2<\cdots<a_{99}<a_{100}\leqslant 1$，已知$a_{n+1}\geqslant 3a_n$（$1\leqslant n\leqslant 99$），若$\max\{a_{n+1}-a_n\}\geqslant m$恒成立，则$m$的取值范围为（　）

A. $m\leqslant\frac{1}{9}$　　B. $m\leqslant\frac{1}{3}$

C. $m\leqslant\frac{2}{3}$　　D. $m\leqslant\frac{4}{9}$

5. ［2024·江苏常州期末］如图，以等腰直角三角形BA_0A_1的直角边BA_1为斜边，在$\triangle BA_0A_1$外侧作等腰直角三角形BA_1A_2，以边BA_0的中点O_1为圆心，作一个圆心角是90°的圆弧A_0A_1；再以等腰直角三角形BA_1A_2的直角边BA_2为斜边，在$\triangle BA_1A_2$外侧作等腰直角三角形BA_2A_3，以边BA_1的中点O_2为圆心，作一个圆心角是90°的圆弧A_1A_2；…；按此规律操作，直至得到的直角三角形$BA_{i-1}A_i$的直角顶点A_i首次落到线段BA_0上，作出相应的圆弧后结束. 若$BA_0=4$，则$i=$________，所有圆弧的总长度为________.



6. ［2024·山东滨州二模］已知函数$f(x)=\frac{3^x-1}{3^x+1}$，数列$\{a_n\}$满足$a_1=a_2=1$，$a_{n+3}=a_n$（$n\in\mathbf{N}^*$），$f(a_2)+f(a_3+a_4)=0$，则$\sum\limits_{i=1}^{2024}a_i=$________.

7. 已知首项为$\frac{1}{2}$的正项数列$\{a_n\}$满足$a_n^{n+1}=a_{n+1}^n$，若存在$n\in\mathbf{N}^*$，使得不等式$[m-(-1)^n a_n][m+(-1)^n a_{n+3}]<0$成立，则$m$的取值范围为________.

8. ［2024·广东广州模拟］已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，数列$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$是公差为$\frac{1}{2}$的等差数列，且$a_1=2$.

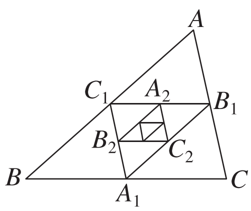
(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)若存在$n\in\mathbf{N}^*$，使得$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\cdots+\frac{1}{a_na_{n+1}}\geqslant\lambda a_{n+1}$成立，求实数$\lambda$的取值范围.

9. 如图，在$\triangle ABC$中，内角A,B,C的对边分别为a,b,c，且$a=3$，$(a-b)(\sin A+\sin B)=(c-b)\sin C$.连接$\triangle ABC$的各边中点得$\triangle A_1B_1C_1$，再连接$\triangle A_1B_1C_1$的各边中点得$\triangle A_2B_2C_2$……如此继续下去，记$\triangle ABC$，$\triangle A_1B_1C_1$，$\triangle A_2B_2C_2\cdots$的面积分别为$S_0,S_1,S_2\cdots$.

(1)求S_0的最大值；

(2)若$S_0+S_1+S_2+\cdots+S_n>\frac{6069\sqrt{3}}{2024}$，求整数$n$的最小值.



能力提升

10. 在直角坐标平面内，将函数$f(x)=2-\frac{2}{x+1}$及$g(x)=\frac{1}{3x}$在第一象限内的图象分别记作C_1，C_2，点$P_n(a_n,f(a_n))(n\in\mathbf{N}^*)$在$C_1$上.过$P_n$作平行于$x$轴的直线，与$C_2$交于点$Q_n$，再过点$Q_n$作平行于$y$轴的直线，与$C_1$交于点$P_{n+1}$.

(1)若$a_1=\frac{1}{3}$，请直接写出a_2,a_3的值；

(2)若$0<a_1<\frac{1}{2}$，求证：$\left\{\frac{a_n-\frac{1}{2}}{a_n+\frac{1}{3}}\right\}$是等比数列.

(3)若$a_1=\frac{1}{3}$，求证：$|a_2-a_1|+|a_3-a_2|+\cdots+|a_{n+1}-a_n|<\frac{4}{3}$.

基础过关

1. 数列$\{a_n\}$的前 n 项的最大值记为 M_n，即 $M_n=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$；前 n 项的最小值记为 m_n，即 $m_n=\min\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，令 $p_n=M_n-m_n$，并将数列$\{p_n\}$称为$\{a_n\}$的“生成数列”.

(1)设数列$\{p_n\}$的“生成数列”为$\{q_n\}$，求证：$p_n=q_n$；

(2)若 $a_n=2^n-3n$，求其生成数列$\{p_n\}$的前 n 项和.

2. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为 $1,2,3,\cdots,n$ 的一个排列，若该排列中有且仅有一个 i 满足 $a_i>a_{i+1}$，$i\in\{1,2,\cdots,n-1\}$，则称该排列满足性质 T. 对任意正整数 n，记 d_n 为满足性质 T 的排列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的个数.

(1)求 d_1,d_2,d_3 的值；

(2)若 $n=4$，求满足性质 T 的所有排列的情形；

(3)求数列$\{d_n\}$的通项公式.

能力提升

3. 有穷数列 $a_1,a_2,\cdots,a_n(n>2)$中,令 $S(p,q)=a_p+a_{p+1}+\cdots+a_q(1\leqslant p\leqslant q\leqslant n,p,q\in\mathbf{N}^*)$.

(1)已知数列$-3,2,-1,3$,写出所有的有序数对(p,q),且 $p<q$,使得 $S(p,q)>0$;

(2)已知整数列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$,n 为偶数,若 $S(i,n-i+1)\left(i=1,2,\cdots,\frac{n}{2}\right)$满足:当 i 为奇数时,$S(i,n-i+1)>0$;当 i 为偶数时,$S(i,n-i+1)<0$.求$|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|$的最小值;

(3)已知数列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足 $S(1,n)>0$,定义集合 $A=\{i\mid S(i+1,n)>0,i=1,2,\cdots,n-1\}$.若 $A=\{i_1,i_2,\cdots,i_k\}(k\in\mathbf{N}^*)$且为非空集合,求证:$S(1,n)>a_{i_1}+a_{i_2}+\cdots+a_{i_k}$.

4. [2024·河南信阳二模] 已知函数 $y=f(x)$,其中 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-kx^2,k\in\mathbf{R}$.若点 A 在函数 $y=f(x)$的图象上,且经过点 A 的切线与函数 $y=f(x)$图象的另一个交点为点 B,则称点 B 为点 A 的一个“上位点”,现有函数 $y=f(x)$图象上的点列 $M_1,M_2,\cdots,M_n,\cdots$,使得对任意正整数 n,点 M_n 都是点 M_{n+1} 的一个“上位点”.

(1)若 $k=0$,请判断原点 O 是否存在“上位点”,并说明理由;

(2)若点 M_1 的坐标为$(3k,0)$,请分别求出点 M_2、M_3 的坐标;

(3)若 M_1 的坐标为$(3,0)$,记点 M_n 到直线 $y=m$ 的距离为 d_n.问是否存在实数 m 和正整数 T,使得无穷数列 d_T、d_{T+1}、$\cdots$、$d_{T+n}\cdots$严格减?若存在,求出实数 m 的所有可能值;若不存在,请说明理由.